



Olympiades nationales de mathématiques 2019



Classes de première (série S)

Académies de Caen et de Rouen

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune. **Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués à des moments différents.** Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Sauf en cas de force majeure aucun candidat n'est autorisé à quitter la salle de composition moins de deux heures après le début.

Les calculatrices sont autorisées.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.



Première partie de l'épreuve

Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Triangles à côtés entiers

On dit qu'un triangle est un triangle entier si les longueurs de ses trois côtés sont des entiers naturels non nuls. On rappelle la propriété dite de l'« inégalité triangulaire », caractéristique de tout triangle non aplati : la longueur de chacun des côtés est strictement inférieure à la somme des longueurs des deux autres.

1. a. Parmi les triplets (x, y, z) suivants, indiquer lequel représente les longueurs des côtés d'un triangle entier non aplati, puis comment tracer ce triangle et avec quels outils :

$(4, 4, 5)$; $(3, 6, 9)$; $(2, 2, 6)$

b. Quelles sont les valeurs possibles de l'entier z si $(15, 19, z)$ désigne les longueurs des trois côtés d'un triangle entier non aplati rangées par ordre croissant (soit : $z \geq 19$) ?

c. Étant donné trois entiers naturels non nuls x, y et z tels que $x \leq y \leq z$, pourquoi suffit-il d'ajouter une seule condition (à préciser) pour que le triplet (x, y, z) désigne les longueurs des côtés d'un triangle entier non aplati ?

2. Soit p un entier naturel non nul. On note E_p l'ensemble des triplets d'entiers naturels rangés par ordre croissant $x \leq y \leq z$ et désignant les côtés d'un triangle entier non aplati dont le périmètre est égal à p .

Ainsi obtiendrait-on $E_9 = \{(1, 4, 4), (2, 3, 4), (3, 3, 3)\}$.

a. Si le triplet (x, y, z) appartient à E_{18} , quelles sont les valeurs maximale et minimale pour z ?

b. Donner la composition de E_{18} et représenter dans un repère orthonormé l'ensemble points de coordonnées (x, y) pour lesquels il existe un entier naturel z tel que $(x, y, z) \in E_{18}$. Vérifier que ces points se situent à l'intérieur ou sur les bords d'un triangle dont les sommets ont des coordonnées entières.

3. a. Justifier que si $(x, y, z) \in E_p$ alors $(x + 1, y + 1, z + 1) \in E_{p+3}$.

b. Soit $(x, y, z) \in E_{p+3}$. Déterminer une condition sur x, y et z pour que $(x - 1, y - 1, z - 1) \in E_p$.

c. En déduire que si p est impair alors E_p et E_{p+3} ont le même nombre d'éléments.

4. Étude de $E_{2\,019}$.

a. $E_{2\,019}$ contient-il un triplet (x, y, z) correspondant à un triangle équilatéral ?

b. $E_{2\,019}$ contient-il des triplets (x, y, z) correspondant à des triangles isocèles non équilatéraux ? Si oui combien ?

c. Montrer que si $E_{2\,019}$ contient un triplet (x, y, z) correspondant à un triangle rectangle alors $2\,019^2 = 4\,038(x + y) - 2xy$.

En déduire que $E_{2\,019}$ ne contient pas de triangle rectangle.

5. Dans cette question on se propose de dénombrer $E_{2\,019}$.

a. Soit $(x, y, z) \in E_{2\,022}$. On rappelle que $x \leq y \leq z$. Établir que $x + y \geq 1\,012$ et $x + 2y \leq 2\,022$.

b. Réciproquement, montrer que si $x \leq y, x + y \geq 1\,012$ et $x + 2y \leq 2\,022$ alors

$$(x, y, 2\,022 - x - y) \in E_{2\,022}.$$

c. Pourquoi, dans un repère orthonormé, l'ensemble des points à coordonnées entières positives (x, y) telles que $x \leq y, x + y \geq 1\,012$ et $x + 2y \leq 2\,022$ constitue-t-il l'ensemble des points à coordonnées entières d'un triangle qui est rectangle ? En déterminer l'aire \mathcal{A} ainsi que le nombre de points à coordonnées entières situés sur ses côtés.

d. On admet le théorème de Pick : « Si un polygone P est tel que tous ses sommets sont à coordonnées entières dans un repère orthonormé alors son aire \mathcal{A} est donnée par la formule $\mathcal{A} = i + \frac{j}{2} - 1$ où i désigne le nombre de points à coordonnées entières situés à l'intérieur de P et j le nombre de ceux situés sur les côtés de P . »

En déduire le nombre de triplets de $E_{2\,022}$ puis celui de $E_{2\,019}$.

6. Une solution algorithmique.

De manière générale, concevoir un programme (à retranscrire sur la copie) permettant d'énumérer et de dénombrer E_p . Le tester sur E_{18} et sur $E_{2\,019}$.

Crédit Mutuel
Enseignant

CASIO

NUMWORKS

TEXAS INSTRUMENTS

Inria
INVENTEURS DU MONDE NUMÉRIQUE

Animath

Google

Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Premières fois

On note \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels. Un nombre premier est un entier naturel qui a exactement 2 diviseurs entiers naturels distincts : 1 et lui-même. Par exemple : 2, 3 et 5 sont premiers alors que 0, 1 et 6 ne le sont pas. On rappelle le théorème de décomposition *en produit de facteurs premiers* :

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, il existe un unique entier naturel k , une unique liste de nombres premiers distincts rangés dans l'ordre croissant $(p_1, p_2, p_3, \dots, p_k)$ et une unique liste d'entiers naturels non nuls $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k)$ tels que :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$$

On écrit, par exemple, $72 = 2^3 \times 3^2$ (ici $k = 2$), ou $32 = 2^5$ (dans ce dernier exemple, $k = 1$).

La décomposition en produit de facteurs premiers d'un nombre premier p s'écrit simplement $p = p^1$.

Une fonction agissant sur les nombres entiers naturels

On souhaite si possible déterminer une fonction $\Delta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ possédant les propriétés suivantes :

Propriété (1) : $\Delta(0) = \Delta(1) = 0$;

Propriété (2) : Pour tout nombre premier p , $\Delta(p) = 1$;

Propriété (3) : Pour tous entiers naturels a et b : $\Delta(a \times b) = \Delta(a) \times b + a \times \Delta(b)$.

On suppose dans les questions 1, 2 et 3 qu'une telle fonction Δ existe.

1. Soit p un nombre premier. Les propriétés précédentes permettent-elles d'exprimer $\Delta(p^2)$? $\Delta(p^3)$?

Un entier naturel n étant donné, quelle est l'image par Δ de p^n ?

2. **a.** Soit p et q des nombres premiers distincts, m et n des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1. Les propriétés précédentes permettent-elles d'exprimer $\Delta(p^m \times q^n)$?

b. Le nombre $\Delta(10^n)$ est-il un multiple de 7 pour $n \geq 1$?

3. À tout nombre entier $n \geq 2$, dont la décomposition en produit de facteurs premiers s'écrit :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$$

on associe les quotients q_1 de n par p_1 , q_2 de n par p_2, \dots, q_k quotient de n par p_k . Montrer qu'alors :

$$\Delta(n) = \alpha_1 \times q_1 + \alpha_2 \times q_2 + \alpha_3 \times q_3 + \dots + \alpha_k \times q_k$$

4. Vérifier que l'expression ainsi obtenue satisfait les propriétés (2) et (3) ci-dessus. Cette expression, alliée à la convention portée dans la propriété (1), définit donc une unique fonction Δ convenable.

Étude de quelques images d'entiers par la fonction Δ .

5. **a.** Calculer $\Delta(12)$, $\Delta(56)$, $\Delta(1\ 001)$.

b. Quelles sont les solutions de l'équation $\Delta(x) = 0$?

c. Quelles sont les solutions de l'équation $\Delta(x) = 1$?

d. Tout entier naturel m a-t-il au moins un antécédent par Δ ?

e. Est-il vrai que, pour tout entier naturel n , $\Delta(n) \leq n$?

6. **a.** Montrer que si p et q sont des nombres premiers alors $\Delta(p \times q) = p + q$.

b. Est-il vrai que pour tous entiers naturels a et b : $\Delta(a \times b) = \Delta(a) + \Delta(b)$?

7. **a.** Est-il vrai que pour tous entiers naturels a et b : $\Delta(a + b) = \Delta(a) + \Delta(b)$?

b. Soient a et b deux entiers naturels tels que $\Delta(a + b) = \Delta(a) + \Delta(b)$ et un entier naturel quelconque k . Montrer que : $\Delta(ka + kb) = \Delta(ka) + \Delta(kb)$.

Les points fixes de la fonction Δ

8. **a.** Soit p un nombre premier. Soit m un entier naturel. On suppose que m est un multiple de p^p . Montrer que dans ce cas, $\Delta(m)$ est aussi un multiple de p^p .

b. Soit n un entier naturel et p un nombre premier. Soit α l'exposant de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n . On suppose que $\alpha \geq 1$. Montrer que si $\alpha < p$, alors $\alpha - 1$ est l'exposant de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de $\Delta(n)$.

9. Résoudre l'équation $\Delta(x) = x$.

Crédit Mutuel
Enseignant

CASIO

NUMWORKS

TEXAS INSTRUMENTS

Inria
INVENTEURS DU MONDE NUMÉRIQUE

Animath

Google

hp

ÉCOLE
POLYTECHNIQUE
UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

UNIVERSITÉ
DE ROUEN
NORMANDIE